سید ابوطالب گلباغی ماسوله
کارشناسی ارشد ریاضی محض

رابطهٔ عدد طلایی با بیضی

چکیده

در این مقابله به بررســـی یک رابطه در بیضی می‌پردازیم که نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک مقدار ثابت عدد φ یا نسبت طلایی است. این گونه بیضی را «بیضی طلایی» می‌گویند. همچنین به رابطهٔ عدد طلایی با بیضی، معادلهٔ بیضی طلایی، مساحت و محیط بیضی طلایی، تلاقی بیضی طلایی با دایرهٔ هم مساحتش، و رابطهٔ مساحت بیضی طلایی با دایره‌هایی با قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی پرداخته شده است.

کلید واژه‌ها: بیضی طلایی، نسبت طلایی، عدد ثابت φ

مقدمه

عدد φ (نسبت طلایی): روش به‌دست آوردن نسبت طلایی با توجه به تعبیر هندسی با توجه به شکل ۱ به‌صورت زیر است:

شکل ۱

$$\varphi=\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}\Rightarrow\frac{b\varphi}{b}=\frac{b\varphi+b}{b\varphi}$$

$$\Rightarrow\varphi=\frac{\varphi+1}{\varphi}\Rightarrow\varphi^2-\varphi-1=0$$

ریشـــهٔ مثبت معادلهٔ درجـــهٔ دوم بالا که همان نســـبت طلایی محسوب می‌شود، عبارت است از:

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong$$ ۱/۶۱۸۰۳۳

معادلهٔ بالا را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\varphi^2=\varphi+1 \qquad (1)$$

در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت: $\varphi^n=F_n\varphi+F_{n-1}$ که در آن F_n و F_{n-1} بـــه ترتیب n امیـــن و n-۱ اُمین جملهٔ دنبالهٔ فیبوناچی هستند. دنبالهٔ فیبوناچی عبارت است از:

$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots$

بیضـــی: بیضی مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌هـــای آن‌ها از دو نقطهٔ ثابـــت و متمایز F_1 و F_2 در آن صفحه، به نام «کانون»، مقدار مثبت ثابتی باشد. فرض کنید $P=(x,y)$ روی بیضی شکل ۲ قرار داشته باشد. در این صورت:

$$|PF_1|+|PF_2|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

مجدداً طرفین را به توان می‌رسانیم:

$$(a^2-c^2).x^2+a^2.y^2=(a^2-c^2).a^2$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

و با توجه به:

$$b^2=a^2-c^2 \qquad (2)$$

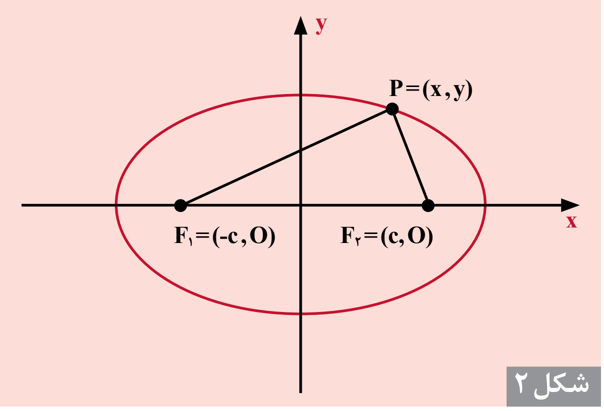
$$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

چون:

$$b^2=a^2-c^2 \Rightarrow b^2-a^2<0 \Rightarrow (b-c)(b+c)<0$$
$$\Rightarrow (b+c)>0 \text{ و } (b-c)<0 \Rightarrow b<c$$

از طرف دیگر، در مثلث F_1PF_2 داریم:

$$|PF_1|+|PF_2|>|F_1F_2| \Rightarrow 2a>2c \Rightarrow a>c$$



شکل ۲

رابطهٔ نسبت طلایی با بیضی

بیضی‌طلایی: اگر نسبت قطر بزرگ بیضی به قطر کوچک بیضی عدد طلایی باشد، آن بیضی را بیضی طلایی گوییم.

$$\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}=\varphi \qquad (3)$$

از رابطهٔ (۲) خواهیم داشت:

$$a^2-b^2=c^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2-1=\left(\frac{c}{b}\right)^2$$
$$\Rightarrow (\varphi)^2-1=\left(\frac{c}{b}\right)^2 \qquad (4)$$

حال اگر رابطهٔ (۱) را در رابطهٔ (۴) جاگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$\varphi+1-1=\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Rightarrow \varphi=\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{c}{b}=\sqrt{\varphi} \qquad (5)$$

اگر رابطهٔ (۳) را بر رابطهٔ (۵) تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{a}{c}=\sqrt{\varphi} \qquad (6)$$

خروج از مرکز بیضی: اگر رابطهٔ (۶) را معکوس کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \qquad (7)$$

معادلهٔ بیضی طلایی

$$\frac{a}{c}=\sqrt{\varphi} \Rightarrow a=c.\sqrt{\varphi} \qquad (8)$$

و

$$\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \Rightarrow b=c.\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \qquad (9)$$

حال اگر دو رابطهٔ (۸) و (۹) را در معادلهٔ بیضی، مثلاً بیضی افقی، قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{c^2\varphi}+\frac{y^2}{\frac{c^2}{\varphi}}=1$$

مساحت و محیط تقریبی بیضی طلایی

با توجه به رابطه‌های ۸ و ۹، خواهیم داشت:

$$\frac{a.b}{c^2}=1 \Rightarrow a.b=c^2 \Rightarrow \pi a.b=\pi c^2 \Rightarrow S=\pi c^2 \qquad (10)$$

یعنی مساحت بیضی طلایی برابر مساحت دایره‌ای به شعاع نصف فاصلهٔ کانونی آن است. حال اگر رابطه‌های ۸ و ۹ را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{a+b}{c}=\sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \Rightarrow a+b=c\left(\sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$$
$$\Rightarrow P=\pi(a+b)=\pi c\left(\sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$$

رابطهٔ بین محیط و مساحت بیضی طلایی با نسبت طلایی

$$P=\pi(a+b)=\pi c\left(\sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$$
$$\Rightarrow P^2=\pi^2c^2\left(\sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2$$
$$\frac{P^2}{S}=\frac{\left(\sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2c^2\pi^2}{\pi c^2} \Rightarrow \frac{P^2}{S}=\pi\left(\sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2$$

نقاط تلاقی بیضی طلایی با دایرهٔ $x^2+y^2=c^2$

ابتدا یک بیضی طلایی افقی و دایرهٔ $x^2+y^2=c^2$ را مطابق شکل ۳ رسم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{c^2\varphi}+\frac{y^2}{\frac{c^2}{\varphi}}=1$$

حال باید نقطه‌های تلاقی بیضی و دایرهٔ $x^2+y^2=c^2$ را به‌دست آوریم، خواهیم داشت:

$$x^2+y^2=c^2 \Rightarrow y^2=c^2-x^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{c^2\varphi}+\frac{x^2-c^2}{\frac{c^2}{\varphi}}=1\Rightarrow$$

$$x^2+\varphi^2(c^2-x^2)=c^2.\varphi$$

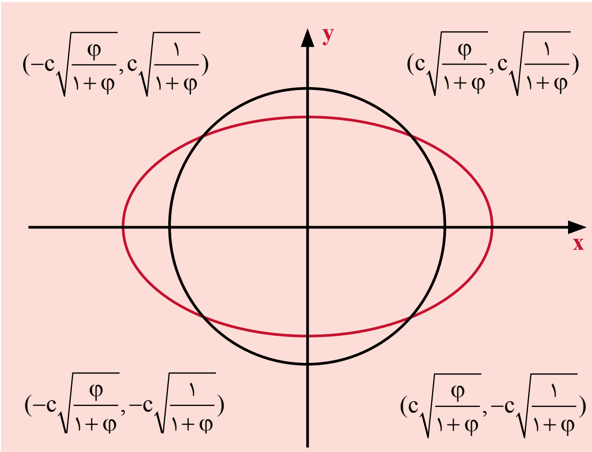
$$\Rightarrow x^2(1-\varphi^2)=c^2.\varphi-\varphi^2c^2$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{c^2\varphi(1-\varphi)}{(1-\varphi)(1+\varphi)}=\frac{c^2\varphi}{(1+\varphi)}$$

$$\Rightarrow x=\pm c\sqrt{\frac{\varphi}{1+\varphi}}\Rightarrow$$

$$y^2=c^2-x^2=c^2-\frac{c^2\varphi}{(1+\varphi)}=c^2(\frac{1+\varphi-\varphi}{1+\varphi})$$

$$\Rightarrow y=\pm c\sqrt{\frac{1}{1+\varphi}}$$



شکل ۳

دایره‌هایی با شعاع نصف قطر بزرگ و کوچک بیضی طلایی

ابتدا دایره‌هایی با شعاع نصف قطر بزرگ و کوچک بیضی طلایی رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$x^2+y^2=a^2$

که با توجه به $a=c\sqrt{\varphi}$، داریم: $x^2+y^2=c^2\varphi$

و نیز:

$x^2+y^2=b^2$

که با توجه به رابطه $b=c.\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ داریم:

$x^2+y^2=c^2.\frac{1}{\varphi}$:

مساحت دایره با شعاع نصف قطر بزرگ بیضی طلایی $= s_a=\pi c^2\varphi$

مساحت دایره با شعاع نصف قطر کوچک بیضی طلایی $= s_b=\frac{\pi c^2}{\varphi}$

مساحت دایره‌ای که با مساحت بیضی طلایی برابر است $= S_c=\pi c^2$

با توجه به مساحت‌های بالا واضح است که مساحت دایره با شعاع نصف قطر بزرگ بیضی طلایی، φ برابر مساحت بیضی طلایی است و مساحت بیضی طلایی φ برابر مساحت دایره با شعاع نصف قطر کوچک بیضی طلایی است.

حجم حاصل از دوران بیضی طلایی حول قطر بزرگ

اگر بیضی طلایی را حول قطر کوچک دوران دهیم، برای به‌دست آوردن حجم حاصل، با توجه به رابطه‌های ۷ و ۸ خواهیم داشت:

$$V_a=\frac{4}{3}\pi b^2a=\frac{4}{3}\pi(c.\frac{1}{\sqrt{\varphi}})^2.c.\sqrt{\varphi}=\frac{4}{3}\pi c^3.\frac{1}{\sqrt{\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}V_c$$

یعنی حجم حاصل از دوران بیضی طلایی حول قطر بزرگ $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ برابر حجم کره‌ای به شعاع نصف فاصلهٔ کانونی است و چون $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ از واحد کوچک‌تر است، داریم:

$$V_a<V_c$$

حجم حاصل از دوران بیضی طلایی حول قطر بزرگ

اگر بیضی طلایی را حول قطر کوچک دوران دهیم، برای به‌دست آوردن حجم حاصل با توجه به رابطه‌های ۷ و ۸ خواهیم داشت:

$$V_b=\frac{4}{3}\pi a^2b=\frac{4}{3}\pi(c.\sqrt{\varphi})^2.c.\frac{1}{\sqrt{\varphi}}=\frac{4}{3}\pi c^3.\sqrt{\varphi}=\sqrt{\varphi}.V_c$$

یعنی حجم حاصل از دوران بیضی طلایی حول قطر کوچک $\sqrt{\varphi}$ برابر حجم کره‌ای به شعاع نصف فاصلهٔ کانونی آن است و چون $\sqrt{\varphi}$ از واحد بزرگ‌تر است، داریم:

$$V_b>V_c$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

$$V_b=\varphi V_a \text{ و } V_b>V_c>V_a$$